



Investeste în oameni!

FONDUL SOCIAL EUROPEAN

Programul Operational Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013

Axa prioritara nr. 1 „Educatia si formarea profesionala în sprijinul cresterii economice si dezvoltarii societatii bazate pe cunoastere”

Domeniul major de interventie 1.5 „Programe doctorale si post-doctorale în sprijinul cercetarii”

Numarul de identificare al contractului: POSDRU/159/1.5/S/137926

Rute de excelență academică în cercetarea doctorală și post-doctorală – READ

WORKSHOP

CERCETAREA – PROTOCOALE ȘI CREATIVITATE ÎN CUNOAȘTERE

Secțiunea economică

Referat

METODE ȘI TEHNICI PERFORMANTE DE TESTARE A IPOTEZELOR ÎN ECONOMIE

Referent: Dorin JULA

București - ianuarie 2015

Metode și tehnici performante de testare a ipotezelor în economie

Prof.univ.dr. Dorin JULA

1. Introducere.....	4
2. Premise.....	7
2.1. Orientarea modelelor spre teorie	7
2.2. Orientarea modelelor spre date	7
3. Modelul linear multifactorial – prezentare generală	8
3.1. Ipotezele modelului.....	9
3.2. Proprietăți ale estimatorilor.....	10
3.3. Criterii de specificare a modelului.....	10
a. Justificare	10
b. Erori de specificare a modelului multifactorial de regresie lineară	12
Omiterea unor variabile explicative importante	12
Includerea unor variabile nerelevante	12
4. Testarea ipotezelor – testele standard	12
4.1. Multicolinearitatea.....	12
a. Consecințe ale multicolinearității.....	12
b. Identificarea multicolinearității.....	13
Criteriul lui Klein	13
Testul Farrar-Glauber.....	13
Factorul de inflație al dispersiei.....	14
Testul Belsley, Kuh & Welsch (BKW).....	14
c. Atenuarea multicolinearității.....	14
4.2. Autocorelarea erorilor.....	14
a. Consecințe ale autocorelării erorilor	14
b. Testarea autocorelării erorilor	15

Testul Durbin – Watson	15
Testul de tip Lagrange.....	16
4.3. Heteroscedasticitatea erorilor	16
a. Consecințe ale ignorării fenomenului de heteroscedasticitate a erorilor	16
b. Testarea heteroscedasticității	16
Testul Goldfeld–Quandt	16
Teste de tip Lagrange.....	17
4.4. Normalitatea distribuției erorilor	17
a. Consecințe ale nerespectării ipotezei de normalitate a distribuției erorilor	17
b. Testarea normalității distribuției erorilor	17
Testul Jarque-Bera	18
Testul Shapiro-Wilk.....	18
4.5. Testarea semnificației parametrilor din ecuația de regresie	19
5. Testarea ipotezelor – teste suplimentare pentru seriile de timp	20
5.1. Teste de rădăcină unitate.....	20
a. Testul Dickey-Fuller	20
b. Testul Phillips-Perron.....	22
c . Testul KPSS	22
5.2. Teste de cointegrare	22
a. Test de cointegrare Engle-Granger.....	22
b. Testul de cointegrare Johansen.....	23
5.3. Testul de cauzalitate Granger	24
6. Metode moderne de testare a ipotezelor în modelele econometrice	25
6.1. Testul BDS.....	25
6.2. Testul bazat pe raportul dispersiilor	26
6.3. Teste eficiente de rădăcină unitate.....	26
a. Testul DF-GLS	27
b. Testul Elliott, Rothenberg și Stock cu punct optimal	27
c. Testele Ng-Perron	28
Precizare bibliografică	29

1. Introducere

Pentru depășirea fazei de anticipare naturală a fenomenelor și de raportare preponderent afectivă la viitor este necesară construirea unui sistem metodologic de investigare a sensului și dinamicii evoluției diferitelor fenomene, a factorilor și condițiilor de care aceasta depinde. Deși rămân încă insuficient soluționate probleme ca acoperirea cu metode adecvate a previziunii și evaluării unor procese sociale și economice sau clasificarea exhaustivă a metodelor și tehnicilor deja elaborate, progresul metodologic înregistrat în acest domeniu poate fi considerat (pe lângă accelerarea schimbărilor în economie, cultură, societate) ca un factor major al exploziei previzionale din prezent (Jula D., Jula N-M., 2014).

Metoda modelării constituie cea mai utilizată aplicație în domeniul elaborării analizelor economice cantitative. În esență, procesul de modelare constă în obținerea unui sistem (abstract sau material) izomorf cu o imagine homomorfă (simplificată, obținută prin selectarea proprietăților considerate esențiale din punctul de vedere al scopului urmărit) a obiectului de cercetat. Modelele matematice constituie unele dintre cele mai puternice și complexe metode de analiză economică. Aceasta deoarece, în elaborare și folosire, modelul matematic îmbină toate cele trei tipuri de raționamente fundamentale: inferența analogică în etapa de elaborare, raționamentul deductiv în calculul modelului și raționamentul de tip inductiv în extrapolarea rezultatelor din teoria matematică în teoria economică (Jula N., Jula D., 2014).

Principalele probleme care afectează calitatea analizei economice realizate prin intermediul modelării pot fi generate de:

- accelerarea ritmului de evoluție a proceselor economice (Godet, 1977);
- inexactitatea datelor (Morgenstern, 1972);
- pierderea informației prin agregare;
- erorile de interpretare (Popper, 1934);
- imprecizia aparatului metodologic folosit (Wiener, 1948)
- efectul de anunțare (efectul Oedip)

sau

- apariția unor fenomene de instabilitate în dinamica sistemelor (Thom, 1972);
- apariția (manifestarea) unor elemente *surpriză*, neașteptate (evenimente de tip "Lebăda neagră" în formularea lui Taleb, 2001 – o combinație de predictibilitate scăzută și impact semnificativ).

Accelerarea ritmului de evoluție a proceselor economice (explozia structuralului în conjunctural – Godet, 1977):

- modelele economice pe termen scurt și mediu urmăresc de obicei variabilele conjuncturale și de tendință, or *accelerarea schimbărilor* face ca evoluția pe termen scurt să fie din ce în ce mai mult dependentă de acțiunea variabilelor structurale.

- se manifestă, de asemenea, așa-numitul fenomen al obsolescenței datelor, adică a degradării informației obținute prin diagnoză datorită rapidității schimbărilor structurale și comportamentale ale sistemelor. Există astfel riscul ca studiile să se fundamenteze pe date ce nu mai corespund stadiului în care se găsește sistemul anticipat, datorită apariției unei anumite asincronii între dinamica sistemului și capacitatea practică de observare (culegere, prelucrare și proiectare anticipativă a informației).

Inexactitatea datelor: în general datele de care dispunem sunt inexacte (afectate de erori, incertitudine și imprecizie). "Dacă se face observația simplă că ritmurile de evoluție sunt afectate de erori, chiar dacă acestea sunt mici, să spunem 2% sau 3%, efectele lor asupra cantităților la care se aplică aceste ritmuri pot să fie semnificative, chiar cu schimbare de semn" (Morgenstern, 1972, p.62).

Pentru ilustrarea unui asemenea fapt, un exemplu sugestiv îl constituie analiza a două sisteme aproape identice:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1.00001 \cdot y = 0 \end{cases} \quad \text{rezultă} \quad \begin{cases} x = 100001 \\ y = 100000 \end{cases} \\ \text{și} & \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0.9999 \cdot y = 0 \end{cases} \quad \text{rezultă} \quad \begin{cases} x = -99999 \\ y = -100000 \end{cases} \end{aligned}$$

Diferența între rezultate este atât de sens (schimbare de semn), cât și în valoare absolută (de 200000), deși cele două sisteme diferă doar la unul dintre coeficienți și doar cu 0.00002!. Exemplul este dat de Oscar Morgenstern și este citat de M.C. Demetrescu (1983).

Pierderea informației prin agregare: de cele mai multe ori funcția de agregare nu este injectivă, deci la distribuții diferite ale indicatorilor agregați nu le corespunde o singură valoare a funcției și deci este imposibil de refăcut drumul invers: dacă există o estimare privind evoluția indicatorului respectiv la orizontul de prognoză, nu se pot determina valorile componentelor care fundamentează acest indicator.

Erorile de interpretare: "Faptele obiective nu ne spun mare lucru; ele nu există decât interpretate prin percepție subiectivă. Datele nu devin informație științifică decât prin intermediul teoriei" (Godet, 1977). Aceste erori de interpretare sunt mai dificil de sesizat și corectat, deoarece, în principiu, o teorie falsă poate duce la o previziune exactă (falsul implică orice) și, pe de altă parte, o teorie adevărată nu poate fi integral verificată ci, doar, prin apelarea la argumente i se poate ridica gradul de credibilitate. Este cunoscută, în acest sens, teoria lui K. Popper (1934) despre nesimetria falsificării și a confirmării: confirmarea unei teorii prin argumente empirice sau teste raționale rămâne permanent provizorie, în timp ce infirmarea empirică a unei previziuni sau teorii prin invocarea unui singur contraexemplu este definitivă.

Imprecizia aparatului metodologic folosit: cu cât se încearcă redarea mai fidelă a particularităților sistemelor dinamice complexe, cu atât aparatul metodologic utilizat este

mai specializat în direcția surprinderii cu fidelitate a structurilor și comportamentelor respective (semnalele regulate) și, drept urmare, mai sensibil la perturbații (amplificator al oscilațiilor neregulate). " ... mecanisme de predicție sunt grevate de două tipuri de erori profund antagonice. Aparatul de predicție proiectat inițial de noi putea să anticipeze o curbă extrem de netedă cu orice grad de aproximație dorit. Dar perfecționarea funcționării s-a făcut cu prețul creșterii sensibilității aparatului. Cu cât aparatul era mai bun pentru semnale regulate, cu atât intra mai puternic în oscilații pentru cele mai mici neregularități și cu atât mai puternice erau aceste oscilații" (Wiener, 1948, p.9).

Efectul de anunțare (efectul Oedip): În clasa enunțurilor anticipative se distinge un tip de previziuni care se referă la fenomene – naturale, biologice, sociale, politice, economice etc. – care se desfășoară indiferent de atitudinea și rezultatele analizei predictive, numite previziuni de așteptare. Evoluția acestor fenomene nu este influențată de faptul că au fost anunțate. Însă predicțiile de așteptare (sau contemplative) nu acoperă orice enunț anticipativ. Există fenomene a căror evoluție este puternic influențată de stările previzionate – amplificată sau diminuată chiar până la anulare – prin însuși faptul că au fost anunțate (efectul de anunțare sau efectul Oedip). Un asemenea efect este posibil numai dacă previziunea se referă la evenimente sau procese a căror stare viitoare depinde de interesele și opiniile agenților umani angajați în mersul evenimentelor și proceselor respective.

În acest sens, este necesar să se facă distincție între previziunile auto-realizatoare și previziunile autodistructive. În prima categorie sunt incluse previziunile care se realizează prin intermediul așa-numitului efect de ricoșeu. De exemplu, prevederea unei rate înalte a inflației contribuie la alimentarea psihologică a unui proces de autoîntreținere a acestei inflații, sau anunțarea predictivă a unei puternice depreciere a cursului de schimb contribuie prin aceleași mecanisme psihosociale la deprecierea efectivă a acestui curs. În cea de-a doua categorie – previziuni autodistructive – sunt avute în vedere situațiile în care acestea nu se realizează din cauza reacțiilor pe care le antrenează: efect de bumerang. Uneori acest efect este dorit și, în consecință, căutat. Acest tip de eroare căutată intenționat este aplicată în studiile previzionale în măsura în care avertismentele date privind dinamica unor procese sau fenomene conduc la angajarea de acțiuni în vederea eliminării evoluțiilor nedorite. Trebuie însă avut în vedere faptul că, urmărite sau nu, reacțiile față de aceste tipuri de previziuni sunt, de cele mai multe ori, greu de controlat sau chiar necontrolabile. În literatura de specialitate este citată, de exemplu, situația apărută pe piața oțelului odată cu declanșarea războiului din Coreea. În acel moment, s-a prevăzut un deficit de lungă durată pe această piață. Previziunea respectivă a relansat activitatea în ramura menționată într-o asemenea măsură încât în circa 2 ani penuria a fost înlocuită cu un surplus al ofertei. De altfel, Keynes (1936) afirma că: "O simplă schimbare a previziunii este capabilă prin efectele sale să provoace o oscilație asemănătoare ca formă unei mișcări ciclice". (Jula D., Jula N.M., 2014, p. 15).

Apariția unor fenomene de instabilitate în dinamica sistemelor. Modificările structurale și în comportamentul sistemului pot avea loc fie prin acumulări succesive în intervale mari, fie prin salturi înregistrate în intervale de timp relativ reduse. Anticiparea acestor fenomene se poate realiza prin analiza și proiecția factorilor generatori de discontinuitate. În acest caz, de obicei, se apelează la metode bazate pe analiza combinatorie și teoria grafurilor (analiza morfologică, arbori de relevanță ș.a.) și, mai ales, la metode intuitive, euristice, creative (metoda Brainstorming, metoda Delphi, metoda scenariilor, analogii ș.a.). Tot în scopul surprinderii fenomenelor de instabilitate în dinamica sistemelor, în ultimul timp s-a dezvoltat

o direcție nouă de cercetare a fenomenelor de criză, a rupturilor în evoluția unor procese naturale, biologice, sociale, politice și economice – *teoria catastrofelor* (Thom, 1968). Potrivit acestei teorii, atunci când perturbațiile exterioare se situează la limita capacității de absorbție a sistemului, o variație lentă și relativ mică a unor parametrii poate duce la salturi bruște și de mare amplitudine în structura și comportamentul acestuia.

2. Premise

Există 2 mari direcții de abordare în modelarea economică:

- Orientarea modelelor spre teorie (PET – Pre-Eminence of Theory Models).
- Orientarea modelelor spre date.

2.1. Orientarea modelelor spre teorie

Ex. modele de echilibru general dinamic stocastic (DSGE - Dynamic stochastic general equilibrium models), modele cu ecuații simultane ș.a.

Problema de identificare – legătura dintre datele statistice și modelul structural.

Avantaje: interpretarea directă a rezultatelor

Critici: Lucas (1976), Sims (1980)

Lucas (1976). Nu pot fi prognozate efectele unei schimbări în politica economică pe baza relațiilor deduse din datele istorice. Modelele structurale sunt instabile deoarece:

- versiunea slabă a criticii Lucas: așteptările (anticipările) agenților sunt modificate printr-o schimbare în cadrul politicii economice.
- versiunea puternică a criticii Lucas: comportamentele agenților sunt modificate printr-o schimbare în cadrul politicii economice.

"... given that the structure of an econometric model consists of optimal decision rules of economic agents, and that optimal decision rules vary systematically with changes in the structure of series relevant to the decision maker, it follows that any change in policy will systematically alter the structure of econometric models."
Lucas, Robert (1976).

Sims (1980): insuficienta dezvoltare a teoriei.

2.2. Orientarea modelelor spre date

Exemple: modele VAR (vector autoregresivi), modele corectoare de erori (ECM – Error Correction Models, VEC – Vector Correction Models).

Problemele: validitatea ipotezelor probabilistice (de exemplu, adecvarea statistică).

"... a recent trend in the practical use of econometric methodology, one that seems destined to play an increasing role in the future of the subject—automated modeling and inference". (Peter C.B. Phillips, 2005. Automated Inference and the Future of Econometrics, *Econometric Theory*, 21, p.1).

Avantaje: atenuează consecințele generate de problema *accelerării ritmului de evoluție a proceselor economice* și duce la obținerea unor rezultate bune în prognoză.

"The focus of econometric analysis has predominantly been on retrospectively estimating and interpreting economic relationships. However, in many uses of econometric models by businesses, governments, central banks, and traders in financial markets the focus is on making decisions in real time, and hence there is an urgent need to develop robust interactive systems that use econometric models to guide decisions in real time". (Hashem Pesaran, Allan Timmermann, 2005. Real-Time Econometrics, *Econometric Theory*, 21, p.212).

Dezavantaje: interpretarea rezultatelor este dificilă.

3. Modelul linear multifactorial – prezentare generală

Model de regresie lineară cu dependențe multiple:

$$Y_t = a_0 + a_1X_{1t} + a_2X_{2t} + \dots + a_kX_{kt} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$Y = XA + e$$

unde

Y este un vector coloană, de dimensiuni $n \times 1$, care are drept componente cele n înregistrări ale variabilei explicate (endogene),

X este o matrice de dimensiuni $n \times (k+1)$, care conține în prima coloană (atașată termenului liber) constanta 1, iar în celelalte k coloane înregistrările pentru fiecare dintre cele k variabile explicative;

A este un vector coloană, de dimensiuni $(k+1) \times 1$, care include cei $k+1$ parametri ai modelului;

e este un vector coloană, de dimensiuni $n \times 1$, care include cele n valori ale variabilei de abatere (erorile din ecuație de regresie)

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{k2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & \dots & X_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{kn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_k \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Estimatorii parametrilor din ecuația de regresie

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Obs. $\hat{A} = A + (X'X)^{-1}X'e$
 $D = (X'X)^{-1}X'e$ este distorsiunea de estimare.

Valorile estimate:

$$\hat{Y} = X\hat{A}$$

Reziduurile din ecuația de regresie:

$$u = Y - X\hat{A}$$

Obs. $\hat{A}$ are aceeași structură ca vectorul parametrilor (A), iar u are structura la fel ca vectorul erorilor (e).

3.1. Ipotezele modelului

I-1: *Linearitatea modelului.* Modelul este linear în sensul că oricare ar fi înregistrarea ($Y_t, X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt}$) selectată, forma legăturii dintre Y_t , variabilele explicative X_{kt} și variabila de abatere este lineară.

Linearitatea se referă la modul în care parametri și variabila de abatere intră în model și nu, în mod necesar, la forma variabilelor.

I-2: *Ipotezele referitoare la variabilele explicative*

- Variabilele explicative nu sunt aleatoare
- Fiecare variabilă exogenă are dispersia nenulă, dar finită
- Numărul de observații este superior numărului de parametri
- Nu există nici o relație lineară între două sau mai multe variabile explicative (absența colinearității)

O ipoteză alternativă pentru I-2Ma admite că variabilele explicative sunt aleatoare, însă nu sunt corelate cu erorile. Ipotezele I-2Mc și I-2Md pot fi scrise concentrat astfel: matricea X este de rang $k+1$.

I-3: *Ipotezele referitoare la erori*

- Erorile e_t au media nulă
- Erorile e_t au dispersia constantă oricare ar fi t (erorile nu sunt heteroscedastice)
- Erorile e_t sunt independente (nu sunt autocorelate)
- Erorile e_t sunt normal distribuite

3.2. Proprietăți ale estimatorilor

Dacă ipotezele modelului sunt respectate, atunci estimatorii *calculați prin metoda celor mai mici pătrate* pentru modelul multifactorial de regresie lineară au anumite proprietăți.

Proprietatea P-1: *estimatorii sunt lineari.* Dacă variabilele explicative X nu sunt aleatoare și au valorile fixate (atunci când se repetă selecția), estimatorii parametrilor din modelul multifactorial de regresie lineară sunt funcții lineare de observațiile din eșantionul selectat.

Proprietatea P-2: *estimatorii sunt nedeplasați.* Dacă erorile sunt variabile aleatoare cu media zero, estimatorii lineari ai parametrilor din modelul multifactorial de regresie lineară sunt nedeplasați.

Proprietatea P-2': *estimatorii sunt consistenți.* Dacă variabilele explicative au dispersia finită, estimatorii lineari și nedeplasați ai parametrilor din modelul multifactorial de regresie lineară sunt consistenți.

Proprietatea P-3: *estimatorii sunt eficienți.* Dacă variabilele explicative au dispersia finită, estimatorii lineari și nedeplasați ai parametrilor din modelul multifactorial de regresie lineară sunt eficienți.

Proprietatea P-4: *estimatorii sunt normal distribuiți.* Estimatorii parametrilor din modelul multifactorial de regresie lineară ($\hat{A}$), calculați prin metoda celor mai mici pătrate, sunt variabile aleatoare cu distribuție normală.

Proprietatea P-5: *estimatorii sunt de maximă verosimilitate.* Estimatorii parametrilor din modelul multifactorial de regresie lineară ($\hat{A}$), calculați prin metoda celor mai mici pătrate, sunt estimatori de maximă verosimilitate.

Teorema Gauss-Markov

Dacă sunt verificate ipotezele de la I-1 la I-3, atunci estimatorii $\hat{A}$ ai parametrilor modelului linear multifactorial sunt *cei mai buni estimatori lineari nedeplasați*, în sensul că, dintre toți estimatorii lineari nedeplasați, au cea mai mică dispersie. În literatura de specialitate se folosește expresia **BLUE** (**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator) pentru estimatorii parametrilor din modelul de regresie lineară calculați prin metoda celor mai mici pătrate, atunci când estimatorii respectivi îndeplinesc condițiile din teorema Gauss-Markov.

3.3. Criterii de specificare a modelului

a. Justificare

Dacă modelele sunt prost specificate, orice discuții referitoare la relevanța teoretică și capacitatea explicativă sunt nejustificate, deoarece se bazează pe proceduri de inferență cu

o fiabilitate îndoielnică: Nu pot fi aduse argumente pentru, sau împotriva unei ipoteze de fond (teoretice) pe baza unui model care, din punct de vedere econometric, este incorect specificat (Spanos, 2011, p. 17). În acest sens, adecvarea econometrică reprezintă o condiție prealabilă pentru adecvarea pe fond (teoretică), conform căreia, modelul structural constituie o explicație corespunzătoare a fenomenului de interes.

Coeficientul de determinare R^2

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n u_t^2}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Coeficientul de determinare corectat $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} (1 - R^2)$$

Criteriul informațional Akaike (Akaike information criterion – AIC)

$$AIC = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t^2 \right) \cdot e^{\frac{2(k+1)}{n}}$$

sau, în expresie logaritmică, $\ln(AIC) = \ln\left(\frac{\sum u_t^2}{n}\right) + \frac{2(k+1)}{n}$

Criteriul Schwartz:

$$SC = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t^2 \right) \cdot n^{\frac{k+1}{n}}$$

sau, în expresie logaritmică, $\ln(SC) = \ln\left(\frac{\sum u_t^2}{n}\right) + \frac{(k+1)}{n} \ln(n)$

Criteriul Hannan-Quinn:

$$HQ = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t^2 \right) \cdot \ln(n)^{\frac{2(k+1)}{n}}$$

sau, în expresie logaritmică, $\ln(HQ) = \ln\left(\frac{\sum u_t^2}{n}\right) + \frac{2(k+1)}{n} \ln(\ln(n))$

O valoare mai mică a criteriilor AIC, SC și HQ indică o mai bună specificare a modelului.

b. Erori de specificare a modelului multifactorial de regresie lineară

Omiterea unor variabile explicative importante

- Dacă o variabilă importantă omisă este corelată cel puțin cu o variabilă inclusă în model, atunci estimatorii parametrilor reținuți în model sunt deplasați și nu sunt consistenți;
 - Chiar dacă variabilele omise nu sunt corelate cu variabilele reținute în model, estimatorul termenului liber ($\hat{\alpha}_0$) este, în general, deplasat;
 - Dispersiile estimate pentru parametrii variabilelor reținute în model sunt estimatori deplasați ai dispersiilor reale și, în consecință, testul t privind semnificația estimatorilor nu este valid.
-

Includerea unor variabile nerelevante

- Dacă o variabilă explicativă nerelevantă este inclusă în model, atunci estimatorii parametrilor pentru toate celelalte variabile din model sunt nedeplasați și consistenți;
 - Dispersiile estimate pentru parametrii variabilelor din model sunt mai mari decât în cazul neinclunderii variabilelor nerelevante și deci estimatori nu sunt eficienți;
 - Deoarece dispersiile estimate pentru parametrii modelului sunt nedeplasate, testul t privind semnificația estimatorilor este valid.
-

4. Testarea ipotezelor – testele standard

4.1. Multicolinearitatea

Situația în care există o relație lineară exactă între două sau mai multe variabile explicative din model se numește *multicolinearitate perfectă*. În practică însă, o asemenea situație este dificil de identificat. Cel mai adesea, se înregistrează o legătură puternică, dar nu perfectă între valorile de selecție ale variabilelor explicative. Adică, un vector coloană al matricei X nu este perfect corelat, ci este doar *aproximativ* o combinație lineară a altor vectori coloană ai matricei X . În această situație, cu cât intensitatea legăturii dintre vectorii respectivi este mai ridicată, cu atât gradul de colinearitate (ale valorilor înregistrate pentru variabilele explicative) este mai mare.

a. Consecințe ale multicolinearității

- Dacă două sau mai multe variabile explicative din modelul de regresie multiplă sunt perfect corelate, estimatorii parametrilor nu pot fi calculați prin metoda celor mai mici pătrate.
-

-
- b. Dacă anumite variabile explicative sunt relativ puternic corelate, estimatorii obținuți prin metoda celor mai mici pătrate sunt lineari, normal distribuiți, nedeplasați, consistenți și de maximă verosimilitate.
 - c. Efectul multicolinearității se manifestă în creșterea abaterii standard a estimatorilor calculați pentru parametrii modelului, ceea ce reduce valoarea testului t statistic (Student). Aceasta face estimatorii mai puțin semnificativi (posibil chiar nesemnificativi). Totuși, testul t rămâne valid.
 - d. Se reduce precizia estimatorilor calculați pentru parametrii modelului, în sensul că abaterea standard mare duce la creșterea intervalului de încredere în care sunt garantați parametrii.
 - e. Deoarece covarianța între variabilele explicative corelate relativ puternic poate fi mare (în valoare absolută), interpretarea parametrilor individuali este dificilă.
-

b. Identificarea multicolinearității

- a. Coeficienții de corelație lineară, calculați pentru perechile de variabile explicative din model, sunt mari în valoare absolută (sunt, în modul, apropiați de +1).
 - b. Determinantul matricei $(X'X)$ are valori în apropierea lui zero.
 - c. Coeficientul de determinare R^2 este mare, iar valorile testelor t (Student), calculate pentru parametrii modelului sunt mici.
 - d. Estimatorii parametrilor sunt sensibili la specificarea modelului.
 - e. Aplicarea unor proceduri formale (criteriul Klein, testul Farrar-Glauber, testul bazat pe factorul de inflație al dispersiei (VIF) și testul Belsley, Kuh & Welsch (BKW)).
-

Criteriul lui Klein

Criteriul lui Klein (1962) se bazează pe compararea coeficienților (r_{ij}) de corelație lineară (Pearson) între cele k variabilele explicative și coeficientul de determinare R^2 . Dacă $|r_{ij}| > R^2$, pentru $i \neq j$, atunci acceptăm presupunerea că există colinearitate între variabilele explicative.

Testul Farrar-Glauber

Se calculează, la fel ca pentru criteriul Klein, coeficienții de corelație simplă între cele k variabilele explicative și se construiește R_k – matricea simetrică a coeficienților respectivi. Dacă $\det(R_k) = 0$, atunci avem colinearitate perfectă între variabilele explicative, iar dacă variabilele X_i sunt independente, atunci $\det(R_k) = 1$. Testul Farrar-Glauber verifică dacă $\det(R_k) = 1$.

Factorul de inflație al dispersiei

Se calculează factorul de inflație al dispersiei pentru estimatorul $\hat{\alpha}_i$: $VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$, unde R_i^2

este coeficientul de determinare din ecuația de regresie în care factorul de influență X_i este calculat în funcție de toate celelalte variabile din model. În general, se consideră că o valoare $VIF > 4$ arată prezența fenomenului de multicolaritate, iar $VIF > 10$ indică un fenomen sever de multicolaritate.

Testul Belsley, Kuh & Welsch (BKW)

Testul BKW pornește de la analiza valorilor proprii ale matricei de covarianță a estimatorilor și se bazează pe observația că dacă există un număr mare de valori proprii în apropierea lui zero, atunci există riscul unor dependențe lineare între variabile.

c. Atenuarea multicolarității

Sintetic, cele mai utilizate proceduri folosite pentru atenuarea fenomenului de multicolaritate sunt următoarele:

-
- Eliminarea unor variabile explicative
 - Realizarea unor observații suplimentare asupra variabilelor din model (se mărește volumul eșantionului)
 - Prelucrarea primară a datelor (calculul ritmurilor de modificare, a sporurilor, indicilor, logaritmare a valorilor observate etc.)
 - Regresia ridge
-

4.2. Autocorelarea erorilor

Autocorelarea erorilor presupune existența unei covarianțe nenule între erorile din ecuația de regresie.

a. Consecințe ale autocorelării erorilor

-
- Estimatorii parametrilor din model sunt nedeplasați și consistenți.
 - Estimatorii parametrilor din model nu sunt eficienți și nu au proprietatea de maximă verosimilitate.
 - Estimatorii calculați pentru dispersia și covarianța parametrilor sunt deplasați, nu sunt consistenți și nu sunt eficienți.
 - Testul t statistic (Student) aplicat pentru analiza semnificației estimatorilor nu este valid.
-

-
- e. Valorile t-Student calculate pentru estimarea semnificației parametrilor sunt supradimensionate, ceea ce sugerează o semnificație a parametrilor mai mare decât este în realitate.
- f. Abaterea standard a erorilor este subdimensionată față de valoarea reală și, în consecință, coeficientul de determinare R^2 este supradimensionat, ceea ce indică o ajustare mai bună decât este în realitate.
-

b. Testarea autocorelării erorilor

Deoarece autocorelarea erorilor afectează calitatea estimatorilor, testarea – și, dacă este cazul, atenuarea – fenomenului respectiv reprezintă un pas important în validarea modelului.

Testul Durbin – Watson

Se aplică doar pentru identificarea autocorelării de ordinul I. Procedura descrisă de Durbin și Watson pentru testarea autocorelării erorilor este următoarea: se estimează modelul prin metoda celor mai mici pătrate și se calculează reziduurile u_t . Se calculează statistica

$$dw = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}$$

și se selectează din tabelele testului Durbin – Watson valorile critice d_L și d_U , pentru k – numărul de variabile explicative din model și n – dimensiunea eșantionului. Dacă $d_U \leq dw \leq 4 - d_U$, atunci nu se respinge ipoteza nulă H_0 : lipsa autocorelării de ordinul I a erorilor.

Dezavantaje ale testului Durbin – Watson

- testul DW depistează doar autocorelarea de ordinul I și nu identifică, de exemplu, fenomenul de sezonabilitate;
- se aplică doar dacă modelul de regresie are termen liber; dacă modelul nu are termen liber, valorile critice din tabelele DW nu sunt valabile - se folosesc pragurile calculate de Farebrother (1980).
- nu se aplică dacă variabilele explicative sunt aleatoare: consecință – rezultatele ar putea fi eronate dacă se aplică pentru modelele care conțin variabile decalate în timp.

Testul de tip Lagrange

Aplicarea testului LM presupune parcurgerea următoarei proceduri: Se rezolvă ecuația prin metoda celor mai mici pătrate și se calculează reziduurile u_t , ca estimatori ai erorilor e_t . Se construiește ecuația auxiliară

$$u_t = b_0 + b_1 X_{1t} + \dots + b_k X_{kt} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = p + 1, p + 2, \dots, n.$$

În ecuația precedentă $b_1, b_2, \dots, b_k$, respectiv $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ sunt parametrii modelului, iar eroarea ε_t este o variabilă aleatoare care respectă ipotezele obișnuite privind distribuția (normală, cu media zero), lipsa heteroscedasticității și a autocorelării. Se rezolvă ecuația auxiliară și se calculează nR^2 , unde R^2 este coeficientul de determinare. Dacă $nR^2 > \chi_p^2(\alpha)$ atunci se respinge ipoteza nulă (erorile nu sunt autocorelate, cel puțin până la ordinul p), la pragul de semnificație α .

4.3. Heteroscedasticitatea erorilor

Heteroscedasticitatea este proprietatea erorilor de a nu avea o dispersie constantă.

a. Consecințe ale ignorării fenomenului de heteroscedasticitate a erorilor

-
- a. Estimatorii parametrilor din model sunt nedeplasați și consistenți.
 - b. Estimatorii parametrilor din model nu sunt eficienți (există estimatori care au o dispersie mai mică).
 - c. Estimatorii calculați pentru dispersia și covarianța parametrilor sunt deplasați, nu sunt consistenți și nu sunt eficienți.
 - d. Testul t Student aplicat pentru analiza semnificației estimatorilor nu este valid. Dacă dispersia erorilor și variația factorului explicativ sunt pozitiv corelate, atunci dispersia corectă a parametrului a_1 este subestimată, astfel încât calculele sugerează o precizie a estimării mai bună decât este în realitate.
 - e. Estimatorii parametrilor nu au proprietatea de maximă verosimilitate.
-

b. Testarea heteroscedasticității

Testul Goldfeld-Quandt

Procedura este următoarea: Se identifică, dintre variabile explicative prezente în model, o variabilă notată Z , de care este (potențial) legată dispersia erorilor. Se aranjează toate observațiile din eșantionul reținut pentru analiză în ordinea crescătoare a valorilor Z_t . Eșantionul de dimensiune n se divide în două părți de dimensiuni n_1 și n_2 , după eliminarea a m observații (între $1/6$ și $1/5$ dintre observații) situate la mijlocul eșantionului. Se calculează dispersia reziduurilor din modelul estimat pentru primele n_1 observații și dispersia

reziduurilor din modelul estimat pentru ultimele n_2 observații. Dacă raportul supraunitar al acestor dispersii este mai mic decât valoarea critică din tabelul distribuției teoretice F cu $n_1-(k+1)$ și $n_2-(k+1)$ grade de libertate, atunci ipoteza nulă, a lipsei heteroscedasticității erorilor nu este respinsă.

Teste de tip Lagrange

Pașii parcurși pentru aplicarea testelor de tip LM sunt următorii: Se rezolvă prin metoda celor mai mici pătrate ecuația de regresie inițială și se calculează reziduurile u_t . Se construiește o ecuație de regresie auxiliară, în care pătratele reziduurilor, u_t^2 , sunt estimate în funcție de p regresori $Z_1, \dots, Z_p$. De exemplu, White propune ca variabilele Z din ecuația auxiliară să fie pătratele variabilelor din ecuația inițială, eventual completate cu elemente mixte de tipul $X_t X_j$, iar metodologia ARCH propune în ecuația auxiliară variabilele cu lag $u_{t-1}^2, \dots, u_{t-p}^2$. Se calculează apoi testul statistic $LM = nR^2$, unde n este numărul de observații utilizat în estimarea regresiilor auxiliare, iar R^2 este coeficientul de determinare (neajustat) din regresiile respective și se compară cu pragul critic din distribuția $\chi_p^2(\alpha)$, unde p este numărul variabilelor Z din ecuațiile auxiliare.

Dacă $LM < \chi_p^2(\alpha)$, atunci nu se respinge ipoteza nulă (lipsa heteroscedasticității erorilor), la pragul de semnificație α .

4.4. Normalitatea distribuției erorilor

Normalitatea distribuției erorilor reprezintă o condiție esențială pentru evaluarea calității estimatorilor calculați prin metoda celor mai mici pătrate, în cazul modelelor lineare de regresie. Aceasta deoarece majoritatea rezultatelor referitoare la regresia lineară au fost dezvoltate pornind de la ipoteza normalității distribuției erorilor.

a. Consecințe ale nerespectării ipotezei de normalitate a distribuției erorilor

- Estimatorii parametrilor din model sunt nedeplasați și consistenți.
 - Estimatorii parametrilor din model nu sunt eficienți.
 - Estimatorii parametrilor din model nu au proprietatea de maximă verosimilitate.
 - Testul t statistic (Student) aplicat pentru analiza semnificației estimatorilor nu este valid
-

b. Testarea normalității distribuției erorilor

În literatura de specialitate sunt discutate două clase de teste pentru evaluarea distribuției normale a unei serii aleatorii:

- teste bazate pe statistici descriptive ale eșantionului (teste privind asimetria, teste asupra coeficientului de aplatizare, teste combinate (omnibus) – testul Jarque-Bera, testul D'Agostino-Pearson ș.a.);
- teste de tip "cea mai bună ajustare" (engl. – best fit), bazate pe compararea distribuției empirice cu o distribuție dată – în acest caz, distribuția normală, de cele mai multe ori pornind de la funcția de distribuție cumulativă (ex. testele Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Anderson-Darling, Cramér-von Mises, Shapiro-Wilk, sau Shapiro-Francia).

Testul Jarque-Bera

Pentru a estima distribuția erorilor, testul Jarque-Bera (1987) folosește momentele μ_p ale reziduurilor (u_t) calculate pe baza metodei celor mai mici pătrate. Testul este formulat astfel:

$$JB = n \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \right) + \frac{1}{24} \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \right)^2 \right] + n \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\mu_1^2}{\mu_2} - \frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2^2} \right), \text{ unde } \mu_p = \frac{\sum_{t=1}^n u_t^p}{n}$$

Ipoteza nulă a testului Jarque-Bera este H_0 : *erorile sunt normal distribuite* și este evaluată contra ipotezei alternative H_1 : *erorile urmează o altă distribuție din familia distribuțiilor de tip Pearson (sau familia distribuțiilor Gram-Charlier de tip A)*. Dacă $JB < \chi_2^2(\alpha)$, atunci, la pragul de semnificație α , nu se respinge H_0 , conform căreia erorile sunt normal distribuite.

În forma consacrată a testului Jarque-Bera, se utilizează *coeficientul de asimetrie* (S) calculat $S^2 = \mu_3^2 / \mu_2^3$, și *coeficientul de aplatizare* K (kurtosis) determinat pe baza relației $K = \mu_4 / \mu_2^2$, sau *excesul* ($K - 3$). Cu aceste notații, statistica JB se scrie:

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right] + n \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\mu_1^2}{\mu_2} - \frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2^2} \right).$$

Dacă *modelul de regresie lineară conține și termenul liber*, atunci suma reziduurilor este zero, adică media $\mu_1 = 0$ și statistica Jarque-Bera este

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right].$$

În aplicarea statisticii JB trebuie să se țină seama de faptul că testele de acest tip sunt asimptotice, astfel încât interpretarea rezultatelor are sens doar pentru dimensiuni mari ale eșantionului.

Testul Shapiro-Wilk

Fie o serie Y_t , $t = 1, 2, \dots, n$. Testul Shapiro-Wilk (1965) privind normalitatea distribuției este definit astfel:

$$W = \frac{\sum_{t=1}^n (a_t y_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

unde y_t simbolizează valorile seriei inițiale (Y_t) ordonate crescător ($y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$), $\bar{y}$ este media seriei respective, iar a_t sunt ponderi. Ipoteza de normalitate a distribuției (H_0) este respinsă dacă $W \leq W_\alpha$, unde pragurile critice W_α sunt tabelate de Shapiro & Wilk (1965, tab. 6, p.605). Valorile a_t pentru $t \leq 50$ sunt tabelate de Shapiro & Wilk (1965, tab. 5, pp. 603-604), iar pentru $50 < n \leq 5000$, valorile coeficienților a_{n-t+1} și statistica W_α au fost calculate de Royston (1982, 1995). Studii comparative (Farrel & Steward, 2006; Keskin, 2006) au demonstrat că testul Shapiro-Wilk este mai puternic decât alte teste de normalitate, cum ar fi Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, sau Lilliefors.

4.5. Testarea semnificației parametrilor din ecuația de regresie

Testarea semnificației reprezintă estimarea riscului ca parametrii din ecuația de regresie să nu fie semnificativ diferiți de zero.

Dacă erorile din modelul de regresie sunt de medie nulă, nu sunt autocorelate, nu sunt heteroscedastice și sunt normal distribuite, atunci sub ipoteza nulă, H_0 : *coeficienții din ecuația de regresie nu diferă semnificativ de zero*, statistica

$$t_{a_i} = \frac{\hat{a}_i}{s_{\hat{a}_i}}$$

urmează o distribuție de tip t-Student, cu $n-k-1$ grade de libertate, unde $\hat{a}_i$ sunt estimatorii din ecuația de regresie lineară, $s_{\hat{a}_i}$ este estimatorul calculat pentru abaterea standard a estimatorului $\hat{a}_i$, n – dimensiunea eșantionului și k – numărul variabilelor explicative din model. Abaterea standard a estimatorului $\hat{a}_i$ se determină pornind de la dispersia $s_{\hat{a}_i}^2$, dispersie preluată de pe diagonala principală a matricei de varianță a estimatorilor, $\text{Var}(\hat{A}) = s_u^2 (X'X)^{-1}$, cu X – matricea variabilelor explicative din model și s_u^2 estimatorul nedeplasat pentru dispersia erorilor, calculat pornind de la variația reziduurilor, după relația

$$s_u^2 = \left(\sum_{t=1}^n u_t^2 \right) / (n - k - 1).$$

Dacă semnul estimatorului $\hat{a}_i$ este sigur (de exemplu, înclinația marginală spre consum nu poate fi negativă), atunci t_{a_i} se compară cu valorile critice din distribuția t-Student

unilaterală și decizia este următoarea: dacă $|t_{a_i}| < t_{\alpha, n-k-1}^*$, atunci ipoteza nulă (coeficientul $\hat{a}_i$ nu diferă semnificativ de zero) nu se respinge, la pragul de semnificație α .

Dacă semnul estimatorului $\hat{a}_i$ nu este sigur, atunci t_{a_i} se compară cu valorile critice din distribuția t-Student bilaterală și decizia este următoarea: dacă $|t_{a_i}| < t_{\alpha, n-k-1}^{**}$, atunci ipoteza nulă (coeficientul $\hat{a}_i$ nu diferă semnificativ de zero) nu se respinge.

5. Testarea ipotezelor – teste suplimentare pentru seriile de timp

5.1. Teste de rădăcină unitate

Este posibil ca modelele econometrice să sugereze în mod fals legături între două (sau mai multe) variabile, chiar dacă, statistic, modelul trece testele menționate. De exemplu, Granger și Newbold (1974) au arătat că, dacă se calculează o ecuație de regresie între două procese aleatorii independente de tip *mers la întâmplare* (engl. *random walks*), în cele mai multe cazuri se obțin estimatori cu un grad ridicat de semnificație (valori mari ale statisticii - t), și valori mari ale coeficientului de determinare (R^2). Granger & Newbold (1974) au numit acest tip de reprezentare *regresie falsă (înșelătoare, fictivă, iluzorie, aparentă)* (engl. *spurious regression*). Aceasta justifică analiza staționarității.

Seria de timp $\{y_t\}$ este *strict staționară* dacă pentru fiecare $h \in \mathbb{Z}$, seria $\{y_{t+h}\}$ are aceeași distribuție ca seria $\{y_t\}$, oricare ar fi $t = 1, 2, \dots, n$. O serie este *slab staționară* (sau *staționară în covarianță*, sau *staționară de ordinul II*) dacă media și dispersia procesului respectiv sunt constante în timp, iar covarianța dintre valorile înregistrate în două perioade diferite de timp depinde numai de distanță (diferența, decalajul) dintre cele două perioade și nu de momentul efectiv în care se calculează covarianța. În sens slab, o serie este nestaționară dacă media seriei respective se modifică în timp, sau dispersia nu este constantă în timp, sau ambele caracteristici sunt variabile în timp.

Testele de staționaritate, sau *testele de rădăcină unitate* evaluează probabilitatea ca $\alpha = 1$ în regresia $y_t = \alpha y_{t-1} + XA + e_t$, unde X reprezintă ansamblul celorlalți factori care determină evoluția seriei y_t , A este vectorul parametrilor atașați variabilelor respective, iar e_t este o variabilă aleatorie i.i.d. De obicei $XA \equiv 0$, $XA = \beta$, sau $XA = \beta + \gamma t$.

a. Testul Dickey-Fuller

Testul Dickey-Fuller pornește de la trei tipuri de modele:

- (1) proces autoregresiv: $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, |\alpha| \leq 1$
- (2) proces autoregresiv cu medie nenulă: $y_t = \alpha y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t, |\alpha| \leq 1$ și $\beta \neq 0$
- (3) proces autoregresiv cu tendință: $y_t = \alpha y_{t-1} + \beta + \gamma t + \varepsilon_t, |\alpha| \leq 1$ și $\gamma \neq 0$.

În toate modelele, variabila aleatorie ε_t este considerată ca fiind *i.i.d.* Dacă admitem că ipoteza nulă $H_0: \alpha = 1$ este adevărată, atunci, sub ipoteza nulă, primul model se reduce la un proces de tip mers la întâmplare ($y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$), al doilea model se reduce la un proces de tip mers la întâmplare *cu derivă* ($y_t = y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$, cu $\beta \neq 0$), iar al treilea model se reduce la un proces de tip mers la întâmplare cu tendință ($y_t = y_{t-1} + \beta + \gamma t + \varepsilon_t$, cu $\gamma \neq 0$). Cele trei modele alternative pot fi rescrise într-o formă echivalentă din punct de vedere algebric:

- (1') $y_t - y_{t-1} = (\alpha - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$, (1'') $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$
- (2') $y_t - y_{t-1} = (\alpha - 1)y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$, (2'') $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$
- (3') $y_t - y_{t-1} = (\alpha - 1)y_{t-1} + \beta + \gamma t + \varepsilon_t$, (3'') $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \beta + \gamma t + \varepsilon_t$.

unde am notat cu ϕ valoarea $(\alpha - 1)$ și Δ este operatorul de diferențiere de ordinul I. Testarea ipotezei $H_0: \alpha = 1$, în modelele inițiale este echivalentă cu $H_0: \phi = 0$ în versiunea transformată.

Testul Dickey-Fuller verifică ipoteza nulă (H_0), $\phi = 0$ (nestaționaritate) contra ipotezei alternative, $\phi < 0$ (staționaritate). Respingem ipoteza nulă $H_0: \phi = 0$ (seria este nestaționară), contra ipotezei alternative $H_1: \phi < 0$, dacă $t_\phi < \tau_\phi$, unde τ_ϕ este una dintre valorile critice (negative) din tabelul distribuției Dickey-Fuller.

În testul Dickey-Fuller se pornește de la ipoteza că erorile ε_t sunt generate de un proces stohastic de tip zgomot alb. În realitate, erorile pot fi autocorelate și / sau heteroscedastice. Testul ADF (Augmented Dickey-Fuller, Dickey & Fuller, 1981) este construit astfel încât să elimine posibila autocorelare a erorilor prin introducerea unor variabile cu întârziere (lag).

La fel ca în cazul testului DF simplu, sunt luate în considerare trei modele:

- [1] $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$
- [2] $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \beta + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$
- [3] $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \beta + \gamma t + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$

unde admitem că variabila ε_t este zgomot alb (de medie nulă, dispersie constantă, necorelată cu y_{t-j} , oricare ar fi $j = 1, 2, \dots, p$). Testarea ipotezei nule (existența rădăcinii unitate) înseamnă, la fel ca în cazul testului DF simplu, testarea $\phi = 0$. Astfel, se testează $H_0: \phi = 0$, contra $H_0: \phi < 0$. Strategia testului este similară celei prezentate în cazul DF

(procedura *secvențială descendentă*, pornind de la modelul cu tendință și constantă). De asemenea, statisticile testului sunt aceleași ca în cazul DF (pragurile τ_φ , τ_β și τ_γ).

b. Testul Phillips-Perron

Testul Phillips-Peron (1988) este construit astfel încât să realizeze o corecție neparametrică a statisticii Dickey-Fuller în condiții de autocorelare și / sau heteroscedasticitate a erorilor. Dacă erorile nu sunt autocorelate și nu sunt heteroscedastice, atunci testul Phillips-Perron duce la aceleași rezultate ca testul Dickey-Fuller simplu.

c. Testul KPSS

Ipoteza nulă a testului KPSS (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt & Shin, 1992) este aceea că seria de timp analizată este staționară, în jurul unei constante (β), sau a unei tendințe deterministe lineare ($\beta + \gamma t$). KPSS scrie seria de timp y_t ca o sumă între un trend determinist, un proces de tip mers la întâmplare (r_t) și eroarea (ε_t), care este presupusă staționară:

$$y_t = \gamma t + r_t + \varepsilon_t,$$

unde $r_t = r_{t-1} + e_t$ și $e_t \sim ZA(0, \sigma_e^2)$. Dacă y_t este staționară, atunci dispersia procesului de tip mers la întâmplare este zero, $\sigma_e^2 = 0$ și $r_t = r_{t-1} = \dots = r_0$. KPSS testează ipoteza nulă de staționaritate, $\sigma_e^2 = 0$. Sub ipoteza nulă, y_t este un proces staționar în jurul unui trend, iar dacă $\gamma = 0$, y_t este staționar în jurul unei constante, r_0 .

5.2. Teste de cointegrare

Dacă există o combinație lineară staționară între variabile aleatoare nestaționare, cu același grad de integrare, atunci variabilele combinate sunt cointegrate. În cazul general, seriile x_t și y_t sunt cointegrate dacă sunt verificate două condiții:

- seriile sunt afectate de o tendință aleatoare cu același grad de integrare d ;
- combinație lineară a acestor serii permite obținerea unei serii cu un ordin de integrare inferior.

Simbolic, fie $x_t \rightarrow I(d)$ și $y_t \rightarrow I(d)$ astfel încât $\alpha_1 x_t + \alpha_2 y_t \rightarrow I(d-b)$, cu $d \geq b > 0$. Se notează $x_t, y_t \rightarrow CI(d,b)$, unde $[\alpha_1, \alpha_2]$ este vectorul de cointegrare. Fie k variabile, toate $I(d)$. Se notează $X_t = [x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{k,t}]$. Dacă există un vector de cointegrare $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$, de dimensiuni $(k, 1)$ astfel încât $\alpha X_t \rightarrow I(d-b)$, $b > 0$, atunci cele k variabile aleatoare sunt cointegrate, iar vectorul de cointegrare este α . Se notează $X_t \rightarrow CI(d, b)$, cu $b > 0$.

a. Test de cointegrare Engle-Granger

Testul de cointegrare Engle-Granger se aplică pentru modelele cu două variabile și presupune parcurgerea următoarelor etape:

Etapa 1: se testează ordinul de integrare a variabilelor. Seriile trebuie să fie integrate de același ordin. Dacă seriile au ordine diferite de integrare, atunci posibilitatea unei relații de cointegrare este exclusă. Fie $x_t \rightarrow I(d)$ și $y_t \rightarrow I(d)$.

Etapa 2: Se estimează relația pe termen lung $y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t$. Relația de cointegrare este acceptată dacă reziduurile $u_t = y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t$ sunt staționare. Staționaritatea reziduurilor este analizată cu ajutorul testelor DF, sau ADF. Deoarece tabelele DF și ADF sunt construite pentru reziduuri rezultate din relația statică dintre x și y , pentru cointegrare au fost construite tabele speciale (MacKinnon, 1991). Dacă reziduurile sunt staționare, se poate estima modelul corector al erorilor.

b. Testul de cointegrare Johansen

Testul pornește de la reprezentarea VAR (vector autoregresiv)

$$\Delta Y_t = A_0 + \Pi Y_{t-1} + A_1 \Delta Y_{t-1} + A_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + A_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + e$$

unde:

Y_t – vector de dimensiunea $(k, 1)$, k – numărul de variabile

A_0 – vector de dimensiunea $(k, 1)$

A_i – matrice de dimensiunea (k, k)

Rangul matricei Π determină numărul relațiilor de cointegrare. Johansen (1988) a propus un test bazat pe vectorii proprii corespunzători valorilor proprii cele mai ridicate ale matricei respective. Pornind de la valorile proprii ale matricei Π se calculează statistica:

$$\lambda_{urm} = -n \sum_{i=r+1}^k \ln(1 - \lambda_i)$$

unde n – numărul de observații, r – rangul matricei, λ_i – cea de-a i valoare proprie cea mai ridicată a matricei Π , k – numărul de variabile. Această statistică urmează o distribuție similară cu χ^2 , tabelată de Johansen și Juselius (1990). Testul Johansen funcționează prin excluderea ipotezelor alternative astfel:

- rangul matricei Π este zero ($r = 0$): $H_0: r = 0$, contra $H_1: r > 0$; dacă H_0 este respinsă ($\lambda_{urm} > \text{valoarea critică din tabel}$) se trece la testul următor. În caz contrar, se acceptă $H_0: r = 0$.
- rangul matricei este egal cu unu ($r = 1$), $H_0: r = 1$, contra $H_1: r > 1$; dacă H_0 este respinsă ($\lambda_{urm} > \text{valoarea critică din tabel}$) se trece la testul următor. În caz contrar, se acceptă $H_0: r = 1$.
- rangul matricei este egal cu 2 ($r = 2$), $H_0: r = 2$, contra $H_1: r > 2$; dacă H_0 este respinsă ($\lambda_{urm} > \text{valoarea critică din tabel}$) se trece la testul următor. În caz contrar, se acceptă $H_0: r = 2$...
- ...

- se testează $H_0: r = k-1$, contra $H_1: r = k$; dacă H_0 este respinsă ($\lambda_{urm} >$ critică din tabel) atunci rangul matricei este $r = k$ și nu există o relație de cointegrare, deoarece toate variabilele sunt $I(0)$.

5.3. Testul de cauzalitate Granger

Testul de cauzalitate Granger (1969), pornește de la premisa că dacă valorile anterioare ale unei variabile y contribuie semnificativ la prognoza valorilor actuale și viitoare ale variabilei x , atunci se spune că y este o cauză în sens Granger a lui x . Invers, în cazul în care valorile trecute ale lui x ajută la îmbunătățirea (în sens statistic) a predicției lui y , atunci x este o cauză în sens Granger a lui y .

Pentru 2 variabile, testul se bazează pe următoarele ecuații de regresie:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} + e_t$$

$$x_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^p \delta_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_j x_{t-j} + \varepsilon_t$$

unde y_t și x_t sunt două variabile, e_t și ε_t sunt variabile de abatere (erorile) necorelate reciproc, t simbolizează timpul, i și j reprezintă lag-urile, iar p este numărul maxim de lag-uri.

Ipoteza nulă a testului Granger este $\alpha_j = 0$ oricare ar fi j și $\delta_i = 0$ oricare ar fi i versus ipoteza alternativă $\alpha_j \neq 0$ și $\delta_i \neq 0$ pentru cel puțin vreun j și/sau i . Dacă cel puțin un α_j este semnificativ statistic și δ_i nu este semnificativ (pentru nici un i), atunci x este o cauză a lui y , în sens Granger. Invers, y este o cauză a lui x . Dacă atât α_j cât și δ_i sunt semnificativi, atunci cauzalitatea se manifestă în ambele sensuri.

Practic, pentru a testa dacă x este o cauză în sens Granger pentru y se procesează astfel: Se calculează prima ecuație și se însumează suma pătratelor reziduurilor din ecuația nerestricționată (RSS_u), apoi se elimină variabilele x_{t-j} (se impun restricțiile $\alpha_j = 0$ oricare ar fi j) și se notează RSS_r este suma pătratelor reziduurilor din ecuația restricționată. Se calculează statistica de tip Wald:

$$W = \frac{(RSS_r - RSS_u)/p}{RSS_u/(n-2p-1)}$$

unde n – numărul de observații, p este numărul de lag-uri și $n - 2p - 1$ este numărul gradelor de libertate ale ecuației nerestricționate. Statistica W urmează o distribuție de tip F cu $(p, n-2p-1)$ grade de libertate. Dacă $W > F_{\alpha;p, n-2p-1}$, atunci respingem ipoteza nulă, $\alpha_j = 0$ (x nu este o cauză în sens Granger a lui y), la pragul de semnificație α .

6. Metode moderne de testare a ipotezelor în modelele econometrice

6.1. Testul BDS

Testul BDS a fost conceput de W.A. Brock, Dechert W. și J. Scheinkman în 1987 și este un instrument puternic pentru detectarea autocorelării în seriile de timp. Testul este utilizat pe scară largă deoarece și-a demonstrat capacitatea de a detecta acest fenomen chiar și în cazul în care alte metode eșuează (Lin, 1997, Kočenda & Briatka, 2005, p.266). Se testează, printr-o tehnică neparametrică, ipoteza nulă (H_0) potrivit căreia valorile seriei de timp sunt independente și identic distribuite, contra unei alternative nespecificate. De exemplu, pentru ecuațiile de regresie, dacă din date a fost eliminată orice dependență lineară (folosind un model de tip ARIMA, calculul diferențelor de ordinul I, sau orice altă tehnică), atunci respingerea ipotezei nule formulate asupra erorilor din model este un semnal al prezenței fenomenului de nelinearitate. Trebuie, totuși, precizat faptul că testul BDS poate identifica doar existența unei dependențe nelineare, nu și natura acestei dependențe (stohastică, sau deterministă, sau de tip haos).

Testul se bazează pe următoarea intuiție (Belaire-Franch & Contreras-Bayarri, 2002). Fie o serie de timp y_t , cu valori i.i.d. după o anumită lege de distribuție și o constantă pozitivă ε . Definim $P_1 = P(|y_i - y_j| \leq \varepsilon), \forall i \neq j, i \text{ și } j \text{ numere întregi}$, probabilitatea ca două puncte să fie situate la o distanță mai mică de ε , unul față de altul și $P_2 = P(|y_i - y_j| \leq \varepsilon, |y_{i-1} - y_{j-1}| \leq \varepsilon), \forall i \neq j, i \text{ și } j \text{ numere întregi}$, probabilitatea ca punctele din două observații consecutive să fie la o distanță mai mică de ε . Dacă valorile y_t sunt independente și identic distribuite, atunci cele două observații din evenimentul 2 sunt independente și, în consecință, $P_2 = (P_1)^2$. Ca urmare, sub ipoteza nulă (H_0 : valorile y_t sunt i.i.d.), anticipăm că diferența $P_2 - (P_1)^2$ este zero.

Relația se generalizează pentru o dimensiune de includere m , astfel încât ipoteza nulă, H_0 : valorile seriei sunt i.i.d este testată pornind de la $H_0: P_m = (P_1)^m$, contra $H_1: P_m \neq (P_1)^m$. Cu alte cuvinte, testarea ipotezei nule (H_0) este echivalentă cu testarea ipotezei că valorile seriei sunt i.i.d. (independente și identic distribuite) contra oricărei alte alternative.

În practică, testul BDS poate fi aplicat asupra reziduurilor din modelul de regresie cu scopul de a identifica existența unei structuri eventual nedepistate de model. Testul BDS este util mai ales atunci când nu avem nici o idee despre ce fel de structură ascunsă ar putea fi prezentă în variabila de eroare (Brock, Hsieh & LeBaron, 1991, p.4.). Dacă modelul este corect specificat, atunci structura caracteristică seriei de date este prinsă de model, astfel încât reziduurile nu ar trebui să prezinte structuri (corelații) identificabile. Dacă ipoteza nulă (erorile sunt i.i.d.) este respinsă, atunci modelul este prost specificat. Slaba performanță a modelului poate proveni din specificarea greșită a ecuației, chiar în condițiile identificării

corecte a structurii lineare, sau din identificarea incorectă a DGP (Data Generating Process – procesul de generare a datelor).

Cu alte cuvinte, testul BDS poate fi utilizat atât pentru identificarea erorilor de specificare a modelului, cât și pentru testarea nelinearității DGP.

6.2. Testul bazat pe raportul dispersiilor

Testul bazat pe raportul dispersiilor se aplică pentru identificarea proceselor de tip *mers la întâmplare* și a fost introdus de Cochrane (1988) și Lo & McKinlay (1988). Testul se bazează pe proprietatea că, pentru un proces aleatoriu de tip *mers la întâmplare*, dispersia creșterilor (diferențelor) este lineară pe intervalul de selecție. Cu alte cuvinte, dispersia diferențelor de ordinul k este de k ori dispersia diferențelor de ordinul 1. Lo & McKinlay au construit statistica testului în două variante: pe de o parte statistica (z_1) este construită sub ipoteza lipsei heteroscedasticității erorilor cu distribuție normală și, pe de altă parte, statistica testului (z_2) este construită sub ipoteza prezenței heteroscedasticității erorilor.

Fie y_t o serie de timp. Deoarece $(y_t - y_{t-1}) + (y_{t-1} - y_{t-2}) = (y_t - y_{t-2})$, rezultă că, atunci când *creșterile seriei y_t sunt independente*, avem $\sigma_{y_t - y_{t-2}}^2 = \sigma_{y_t - y_{t-1}}^2 + \sigma_{y_{t-1} - y_{t-2}}^2$. Mai mult, în cazul ideal, dacă *dispersia creșterilor este constantă* ($\sigma_{y_t - y_{t-1}}^2 = \sigma_{y_{t-1} - y_{t-2}}^2$), atunci $\sigma_{y_t - y_{t-2}}^2 = 2\sigma_{y_t - y_{t-1}}^2$ și, mai departe, $\sigma_{y_t - y_{t-k}}^2 = k\sigma_{y_t - y_{t-1}}^2$. Cu alte cuvinte, atunci când *creșterile seriei y_t sunt independente*, iar *dispersia creșterilor este constantă*, dispersia diferențelor de ordinul k este de k ori dispersia diferențelor de ordinul 1:

$$\frac{\sigma_{y_t - y_{t-k}}^2}{k\sigma_{y_t - y_{t-1}}^2} - 1 = 0.$$

Testul bazat pe raportul dispersiilor verifică relația precedentă. Dacă relația este adevărată, atunci creșterile seriei sunt independente, ceea ce înseamnă că seria este de tip *mers la întâmplare*.

Observație. Dacă testele sunt aplicate corect, atunci nerespingerea ipotezei nule în testul bazat pe raportul dispersiilor pentru o serie y_t (DGP este de tip *mers la întâmplare*, cu sau fără derivă) ar trebui să fie asociată cu respingerea ipotezei nule din testul BDS pentru seria w_t și nerespingerea ipotezei nule din testul BDS pentru seria Δy_t (DGP este *i.i.d.*).

6.3. Teste eficiente de rădăcină unitate

Testele de rădăcină unitate ADF și PP sunt asimptotic echivalente, dar diferă atunci când sunt aplicate în eșantioane finite, datorită modului diferit în care corectează autocorelarea în ecuația de regresie a testului (ADF reduce numărul gradelor de libertate cu p – dimensiunea

părții autoregresive). Se demonstrează (Stock, 1994) că puterea testelor ADF și PP scade atunci când seria este generată de un proces cu o componentă negativă în structura de tip medie mobilă. În asemenea condiții, testele sunt distorsionate, în sensul că resping ipoteza nulă (existența rădăcinii unitate), chiar dacă aceasta este adevărată (Schwert, 1989). Probleme similare apar și în cazul testului KPSS (Caner & Kilian, 2001). De asemenea, dacă pe lângă constantă, în ecuația de regresie a testului este inclus și trendul, atunci puterea testelor de rădăcină unitate scade.

O altă problemă constă în faptul că testele DF (ADF) și PP nu au, în general, o acuratețe foarte bună în depistarea staționarității atunci când seriile sunt aproape $I(1)$. Cu alte cuvinte, testele de rădăcină unitate nu disting cu suficientă acuratețe un proces staționar cu memorie lungă, de un proces nestaționar. De exemplu, procesul $y_t = 0.95y_{t-1} + e_t$ este staționar, iar această caracteristică nu este întotdeauna depistată de testele DF (ADF) sau PP, mai ales dacă dimensiunea seriei este redusă.

a. Testul DF-GLS

Elliott, Rothenberg & Stock (1996) au propus o metodologie de testare a staționarității care îmbunătățește proprietățile testelor Dickey-Fuller și Phillips-Perron pentru eșantioane de dimensiune finită. Fie modelul

$$y_t = d_t\beta + v_t$$
$$v_t = \alpha v_{t-1} + e_t, t = 1, \dots, T,$$

unde d_t este componenta non-stohastică și dispersia lui v_0 este finită oricare ar fi α în apropierea lui 1. Folosind o aproximare asimptotică pentru alternativa la ipoteza nulă, $\alpha = 1$ și anume $H_1: \alpha = 1 + c/T$, pentru $c < 0$, Elliott, Rothenberg și Stock (1996), construiesc o clasă de teste statistice care ajung foarte aproape de anvelopa dată de lema Neyman-Pearson (1933), lema care permite construirea celui mai puternic test contra oricărei alternative punctuale.

Aceste teste sunt cunoscute sub denumirea de *teste eficiente de rădăcină unitate* și au în general, o putere superioară testelor de tip ADF, sau Phillips-Perron.

Metodologia ERS pornește de la eliminarea tendinței din seria de date printr-o cvasi-diferențiere și apoi aplică ADF pe seria diferențiată. Interpretarea rezultatelor este similară testelor DF, ADF și PP: dacă valoarea statisticii t_ϕ este mai mică decât pragul critic, atunci ipoteza nulă (seria are o rădăcină unitate) se respinge.

b. Testul Elliott, Rothenberg și Stock cu punct optimal

Elliott, Rothenberg și Stock (1996) au propus un test de rădăcină unitate cu punct optimal (eng. *point optimal unit root test*), adică cel mai puternic test de rădăcină unitate care are ca ipoteză nulă lipsa staționarității ($H_0: \alpha = 1$), contra ipotezei alternative de staționaritate

formulată ca $H_1: \alpha = 1+c/T$ (cu $c < 0$). Notăm $S(\bar{\alpha})$ suma pătratelor reziduurilor din ecuația de regresie $y_t^{\bar{\alpha}} = d_t^{\bar{\alpha}}\beta + v_t$. Testul de punct optimal $\alpha = 1$, contra alternativei de staționaritate $\alpha = \bar{\alpha} = 1 - c/T$ este definit prin statistica

$$P_T = \frac{S(\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}S(1)}{\hat{\omega}^2}$$

unde $\hat{\omega}^2$ este un estimator al dispersiei pe termen lung a erorilor și u_t sunt reziduurile din ecuația de regresie a lui $y_t^{\bar{\alpha}}$. Valorile critice pentru testul t aplicat coeficientului α sunt calculate de Elliott, Rothenberg & Stock (1996, p. 825, Table 1A & 1B). Interpretarea testului este similară testelor DF, ADF și PP: dacă valoarea statisticii P_T este mai mică decât pragul critic, atunci ipoteza nulă (seria are o rădăcină unitate) nu se acceptă și invers, dacă P_T este mai mare decât valoarea critică din tabelele precedente, atunci se acceptă ipoteza nulă, conform căreia seria este nestaționară.

c. Testele Ng-Perron

Testele de tip Ng-Perron (1996, 2001) reprezintă versiuni ale procedurilor Phillips-Perron, construite pe baza metodologiei prezentate pentru testele eficiente de tip punct optimal. Testele Ng-Perron pornesc de la valorile y_t^d calculate prin eliminarea tendinței locale din seria inițială, la fel ca în testele de punct optimal ERS. Se definește

$$\kappa = \frac{\sum_{t=2}^T (y_{t-1}^d)^2}{T^2}, \text{ apoi se calculează 4 teste}$$

$$MZ_{\alpha} = \frac{\frac{(y_T^d)^2}{T} - \hat{\omega}^2}{2\kappa},$$

$$MSB = \frac{\sqrt{\kappa}}{\hat{\omega}},$$

$$MZ_t = MZ_{\alpha} \cdot MSB$$

$$\text{și } MP_T^d = \begin{cases} \frac{c^2\kappa - c \frac{(y_T^d)^2}{T}}{\hat{\omega}^2}, & \text{pentru } d_t = 1 \\ \frac{c^2\kappa + (1-c) \frac{(y_T^d)^2}{T}}{\hat{\omega}^2}, & \text{pentru } d_t = (1, t) \end{cases}$$

unde $c = -7$, pentru $d_t = 1$ și $c = -13.5$, pentru $d_t = (1, t)$, $\hat{\omega}^2$ este un estimator al dispersiei pe termen lung a reziduurilor și u_t sunt reziduurile din ecuația de regresie a valorilor y_t^d .

Ipoteza nulă (existența rădăcinii unitate) este respinsă dacă MZ_{α} , MZ_t , MSB și MP sunt mai mici decât valorile critice din tabelul Ng-Perron (2001, p. 1524).

Precizare bibliografică

Metodele și analizele prezentate în capitolele 3 și 4 sunt detaliate în lucrările:

Jula N., Jula D., 2014. *Modelare economică. Modele econometrice și de optimizare* (ed. a 8-a), Editura Mustang, București

Jula D., Jula N., 2015. *Prognoză economică* (ed. a 3-a), Editura Mustang, București

Metodele și analizele prezentate în capitolele 5 și 6 sunt detaliate în lucrarea:

Jula D., Jula N.-M., 2015. *Econometria seriilor de timp*, Editura Mustang, București.

Trimiterile bibliografice din text sunt, de asemenea, detaliate în lucrările menționate.